

**2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）  
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛  
加试（B 卷）参考答案及评分标准**

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分。
2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次。

一. （本题满分 40 分）设  $a, b, c > 0$ ， $a + b + c = 3$ ，记

$$S = a + ab + abc + bc + c.$$

(1) 证明： $S \leq 5$ ；

(2) 若  $S = 3$ ，求  $b$  的取值范围.

解：(1) 由于  $S = abc + (a + c)(b + 1)$ ，利用均值不等式及  $a + b + c = 3$ ，得

$$abc \leq \left( \frac{a + b + c}{3} \right)^3 = 1,$$

$$(a + c)(b + 1) \leq \left( \frac{(a + c) + (b + 1)}{2} \right)^2 = 4,$$

两式相加得  $S \leq 5$ .

.....20 分

(2) 由  $S = 3$  及  $a + b + c = 3$ ，可知  $b(a + ac + c) = S - a - c = b$ ，又  $b > 0$ ，故  $a + ac + c = 1$ ，即  $(a + 1)(c + 1) = 2$ .

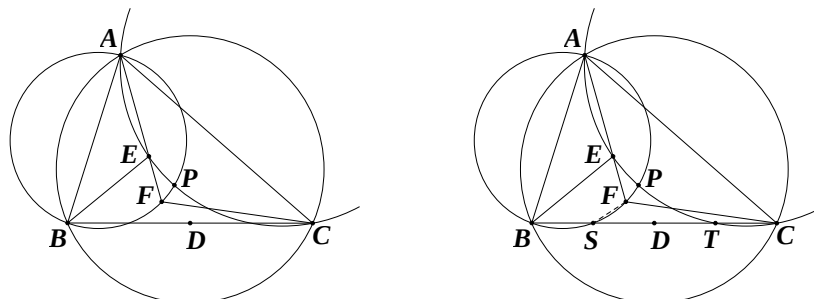
由  $a > 0$  知  $a + 1 > 1$ ，由  $c > 0$  知  $a + 1 = \frac{2}{c + 1} < 2$ . 注意到函数  $f(x) = x + \frac{2}{x}$  在  $[1, \sqrt{2}]$  上严格减，在  $[\sqrt{2}, 2]$  上严格增，且  $f(1) = 3$ ， $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ ， $f(2) = 3$ ，故由  $a \in (1, 2)$  知  $a + 1 + \frac{2}{a + 1} \in [2\sqrt{2}, 3)$ .

从而  $b = 3 - a - c = 5 - \left( a + 1 + \frac{2}{a + 1} \right) \in (2, 5 - 2\sqrt{2}]$ .

.....40 分

二. (本题满分 40 分) 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  为边  $BC$  的中点,  $\angle BAC$  平分线上的两点  $E, F$  满足  $\angle AEB = \angle AFC = 180^\circ - \angle BAC$ ,  $\triangle AFB$  的外接圆与  $\triangle AEC$  的外接圆交于  $A$  及另一点  $P$ . 证明:  $A, P, D$  三点共线.

(答题时请将图画在答卷纸上)



证明: 用  $A, B, C$  分别记  $\triangle ABC$  的三个内角,  $a, b, c$  分别表示角  $A, B, C$  所对边的长. 由条件知  $\angle BAE = \angle FAC = \frac{A}{2}$ , 结合  $\angle AEB = \angle CFA = 180^\circ - A$ , 可知  $\angle EBA = \frac{A}{2}$ ,  $\angle ACF = \frac{A}{2}$ . 所以  $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF} = 2 \cos \frac{A}{2}$ . .....10 分

设  $\triangle AFB$  的外接圆与  $\triangle AEC$  的外接圆分别再次交边  $BC$  于点  $S$  和  $T$ .

连接  $FS$ , 则  $\angle CSF = \angle BAF = \frac{A}{2}$ , 并且

$$\angle SFC = 360^\circ - \angle CFA - \angle AFS = (180^\circ - \angle CFA) + (180^\circ - \angle AFS) = A + B,$$

故由正弦定理知  $\frac{CS}{CF} = \frac{\sin \angle SFC}{\sin \angle CSF} = \frac{\sin(A+B)}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{A}{2}}$ .

$$\text{于是 } CS = \frac{\sin C}{\sin \frac{A}{2}} \cdot CF = \frac{\sin C}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{AC}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2 \sin C}{\sin A} \cdot b = \frac{2bc}{a}.$$

同理得  $BT = \frac{2bc}{a}$ , 所以  $BT = CS$ . .....30 分

结合  $DB = DC$ , 可得  $DS = DT$ , 所以  $DB \cdot DS = DC \cdot DT$ , 即点  $D$  在  $\triangle AFB$  的外接圆与  $\triangle AEC$  的外接圆的根轴上, 故  $A, P, D$  三点共线. ....40 分

三. (本题满分 50 分) 给定整数  $n \geq 2$ . 设  $A$  是由  $n$  个不同的正整数构成的集合, 记  $m$  为集合  $B = \{x + yz \mid x, y, z \in A\}$  的元素个数. 证明:  $m \geq n^2 + n - 1$ , 并且存在集合  $A$  使得  $m = n^2 + n - 1$ .

证明: 设  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 其中正整数  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

对  $k = 1, 2, \dots, n$ , 令集合

$$B_k = \{a_i + a_k a_n \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

则对  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , 由正整数  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  可知

$$\max B_k = a_n + a_k a_n = (1 + a_k) a_n \leq a_{k+1} a_n < a_1 + a_{k+1} a_n = \min B_{k+1}. \quad \textcircled{1}$$

.....20 分

再令集合  $B_0 = \{a_1 + a_1 a_j \mid j \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$ , 则

$$\max B_0 = a_1 + a_1 a_{n-1} < a_1 + a_1 a_n = \min B_1. \quad \textcircled{2}$$

由①、②知  $B_0, B_1, \dots, B_n$  是  $B$  的两两不交的子集. 又  $|B_0| = n-1$ , 且  $|B_k| = n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , 从而

$$m = |B| \geq |B_0| + |B_1| + \dots + |B_n| = n-1 + n \times n = n^2 + n - 1. \quad \textcircled{3}$$

.....40 分

下面构造一个集合  $A$ , 使得  $m = n^2 + n - 1$ .

取  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ , 则对任意  $x, y, z \in A$ , 有  $2 \leq x + yz \leq n + n^2$ , 且  $x + yz$  为正整数, 故  $m \leq (n^2 + n) - 2 + 1 = n^2 + n - 1$ , 结合③知此时  $m = n^2 + n - 1$ .

.....50 分

四. (本题满分 50 分) 求具有下述性质的所有正整数  $n$ : 存在  $n$  的一个倍数  $N$ , 其在十进制表示下含有  $0, 1, 2, \dots, 9$  中每一个数码, 并且对任意  $i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , 可以删去  $N$  的十进制表示中的一个数码  $i$ , 使所得的数仍是  $n$  的倍数.

解: 所求的  $n$  为满足  $3 \nmid n$  的所有正整数  $n$ .

必要性: 若  $3 \mid n$ , 则  $3 \mid N$ , 可知  $N$  的数码和被 3 整除, 但是  $N$  删去一个 1 后, 数码和不被 3 整除, 从而不可能是  $n$  的倍数. ....10 分

充分性: 设  $n = 2^\alpha 5^\beta d$ , 其中  $\alpha, \beta$  为非负整数,  $d$  与 10 互素. 对由数码构成的若干个数码串  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , 记  $\overline{M_1 * M_2 * \dots * M_k}$  为将  $M_1, M_2, \dots, M_k$  依次写下来所构成的数码序列 (看作十进制数).

构造  $N$  如下: 取正整数  $k$  满足  $10^k > d$ , 令

$$N = \overline{A_1 * 1 * A_2 * 2 * \dots * A_9 * 9 * A_{10} * B},$$

其中  $A_1$  是正整数,  $A_2, A_3, \dots, A_{10}$  均是  $k$  位数码串,  $B$  是  $l$  个 0 构成的数码串, 这里  $l > \max\{\alpha, \beta\}$ .

对  $1 \leq i \leq 9$ , 将  $N$  删去上面表达式中的  $i$  后所得的数记为  $N_i$ , 则易知

$$N - N_i = (9 \times \overline{A_1 * 1 * \dots * A_{i-1} * (i-1) * A_i + i}) \times 10^{l_i},$$

其中  $l_i = (9-i)(k+1) + k + l$ .

我们要求  $d \mid N - N_i$  ( $1 \leq i \leq 9$ ). ....20 分

取  $A_1 \in [1, 10^k)$ , 满足  $9A_1 + 1 \equiv 0 \pmod{d}$ , 这由  $3 \nmid d$  及  $d < 10^k$  可知  $A_1$  存在, 从而  $d \mid N - N_1$ .

假设已经取了  $A_1, \dots, A_i$  ( $i < 9$ ), 使得  $d \mid N - N_j$  ( $1 \leq j \leq i$ ), 则由  $3 \nmid d$  及  $d < 10^k$  知, 可取  $A_{i+1} \in [1, 10^k)$  满足

$$9 \times (\overline{A_1 * 1 * \dots * A_i * i \times 10^k + A_{i+1}}) + (i+1) \equiv 0 \pmod{d},$$

从而  $d \mid N - N_{i+1}$ . 若  $A_{i+1}$  不足  $k$  位, 则在其最高位前用 0 补足至  $k$  位, 则上式显然仍成立. 这样取定了  $A_1, A_2, \dots, A_9$ . ....30 分

再取  $A_{10} \in [1, 10^k)$  (同上用 0 补足至  $k$  位), 使得

$$\overline{A_1 * 1 * \dots * A_9 * 9 * A_{10}} = 10^k \times \overline{A_1 * 1 * \dots * A_9 * 9} + A_{10} \equiv 0 \pmod{d},$$

这样  $d \mid N$ . 因为  $l > \max\{\alpha, \beta\}$ , 故  $2^\alpha 5^\beta \mid 10^{l-1}$ , 从而  $n \mid \frac{N}{10}$ , 更有  $n \mid N$ .

现在证明如上构造的  $N$  满足要求.

若  $N$  删去末位的一个 0, 则得到的数为  $\frac{N}{10}$ , 这是  $n$  的倍数.

此外, 对  $i = 1, 2, \dots, 9$ , 由  $d \mid N - N_i$  及  $l_i > l > \max\{\alpha, \beta\}$ , 可知  $n \mid N - N_i$ , 结合  $n \mid N$  知  $n \mid N_i$ . 证毕. ....50 分