

**2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
一试（B 卷）参考答案及评分标准**

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准。填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次。

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次。

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分。

1. 设集合 $A = \{a^2 \mid a \in \mathbf{Z}, a^2 \geq 2025\}$ ， $B = \{2^b \mid b \in \mathbf{Z}, 9 \leq b \leq 14\}$ ，则 $A \cap B$ 的元素个数为_____。

答案：2。

解：在 B 的元素中， $2^9, 2^{11}, 2^{13}$ 都不是平方数， 2^{10} 小于 2025，所以它们都不属于 A ，而 $2^{12} = 64^2 \in A$ ， $2^{14} = 128^2 \in A$ ，所以 $A \cap B$ 的元素个数为 2。

2. 若 $\sin 20^\circ \sin 25^\circ + \sin \alpha = \cos 20^\circ \cos 25^\circ$ ，则 $\cos 2\alpha$ 的值为_____。

答案：0。

解： $\sin \alpha = \cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ = \cos(20^\circ + 25^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

故 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 0$ 。

3. 若 $\log_3 x, \log_9(3x), \log_{27}(9x)$ 成等比数列，则正数 x 的值为_____。

答案：3 或 $\frac{1}{27}$ 。

解：设 $\log_3 x = t$ ，则 $t, \frac{1+t}{2}, \frac{2+t}{3}$ 成等比数列。所以 $\left(\frac{1+t}{2}\right)^2 = t \cdot \frac{2+t}{3}$ ，化简得 $t^2 + 2t - 3 = 0$ ，解得 $t = 1$ 或 -3 。相应地有 $x = 3^t = 3$ 或 $\frac{1}{27}$ 。

4. 设复数 z 满足 $z + i$ 与 $z^2 + 2i$ 均为实数（ i 为虚数单位），则 $|z^3 + 3i|$ 的值为_____。

答案： $\sqrt{5}$ 。

解：由 $z + i \in \mathbf{R}$ ，可设 $z = a - i (a \in \mathbf{R})$ ，则 $z^2 + 2i = (a - i)^2 + 2i$ 。

再由 $z^2 + 2i \in \mathbf{R}$ 可知 $\text{Im}(z^2 + 2i) = -2a + 2 = 0$ ，得 $a = 1$ ，故 $z = 1 - i$ 。

计算得 $z^3 = -2 - 2i$ ，因此 $|z^3 + 3i| = |-2 + i| = \sqrt{5}$ 。

5. 若 $x, y > 0$ 且 $x + y = 1$ ，则 $\frac{y+1}{x} + \frac{x+2}{y}$ 的最小值为_____。

答案： $3 + 2\sqrt{6}$ 。

解：由条件并利用基本不等式，可知

$$\begin{aligned}\frac{y+1}{x} + \frac{x+2}{y} &= \frac{x+2y}{x} + \frac{3x+2y}{y} = 3 + \frac{2y}{x} + \frac{3x}{y} \\ &\geq 3 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{3x}{y}} = 3 + 2\sqrt{6}.\end{aligned}$$

当 $\frac{2y}{x} = \frac{3x}{y}$ (即 $x = \sqrt{6} - 2, y = 3 - \sqrt{6}$) 时, $\frac{y+1}{x} + \frac{x+2}{y}$ 取到最小值 $3 + 2\sqrt{6}$.

6. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 若 Γ 上存在一点 P , 使得直线 F_1P, F_2P 的斜率分别为 $\frac{1}{2}, 2$, 则 Γ 的离心率为_____.

答案: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

解: 将 $\triangle PF_1F_2$ 的三个内角 $\angle F_1PF_2, \angle PF_1F_2, \angle PF_2F_1$ 分别记为 α, β, γ .

由条件易知 P 在第一象限, $\tan \beta = \frac{1}{2}, \tan \gamma = -2$. 进而

$$\tan \alpha = \tan(180^\circ - \beta - \gamma) = -\tan(\beta + \gamma) = -\frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma} = \frac{3}{4}.$$

所以 $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \gamma = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由于 $|F_1F_2|$ 是 Γ 的焦距, $|PF_1| + |PF_2|$ 是 Γ 的长轴长, 且由正弦定理知

$$\frac{|F_1F_2|}{\sin \alpha} = \frac{|PF_2|}{\sin \beta} = \frac{|PF_1|}{\sin \gamma},$$

所以 Γ 的离心率 $e = \frac{|F_1F_2|}{|PF_1| + |PF_2|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma + \sin \beta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. 平面中的 3 个单位向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq \frac{1}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} \leq -\frac{1}{2}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 的最大值与最小值之和为_____.

答案: $\sqrt{3} + 1$.

解: 由条件知 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 3, (\vec{b} + \vec{c})^2 = 2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} \leq 1$, 结合三角不等式知 $\sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} - |\vec{c}| \leq |\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{c}| \leq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + 1 = 2$.

当 $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{c} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 取到最大值 2.

当 $\vec{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \vec{c} = (-1, 0)$ 时, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 取到最小值 $\sqrt{3} - 1$.

因此 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 的最大值与最小值之和为 $2 + (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 1$.

8. 从 20 个数 $1, 2, 3, \dots, 20$ 中选出 4 个不同的数 (不计顺序), 使它们的乘积为 2025 的倍数, 则不同选法的数目为_____.

答案: 24.

解: 在 $1, 2, 3, \dots, 20$ 中, 3 的倍数有 $3, 6, 9, 12, 15, 18$, 其中 $9, 18$ 含素因子 3 的次数为 2, 其余均不是 3^2 的倍数; 5 的倍数有 $5, 10, 15, 20$, 且它们均不是 5^2 的倍数; 这些数中只有 15 既是 3 的倍数又是 5 的倍数.

将选出的 4 个数记为 a, b, c, d . 由 $2025 = 3^4 \times 5^2$ 知 $3^4 \mid abcd, 5^2 \mid abcd$.

若 $9, 18$ 都不选, 则 a, b, c, d 必须都选 3 的倍数, 但此时 $5^2 \nmid abcd$, 不合要求.

若 $9, 18$ 恰选一个, 则 $3, 6, 12, 15$ 至少选两个, $5, 10, 15, 20$ 至少选两个, 这样 15 必须选. 不妨设 $a \in \{9, 18\}, b = 15, c \in \{3, 6, 12\}, d \in \{5, 10, 20\}$, 则有 $2 \times 1 \times 3 \times 3 = 18$ 种选法.

若 $9, 18$ 都选, 则恰需在 $5, 10, 15, 20$ 中选两个, 有 $C_4^2 = 6$ 种选法.

综上, 满足要求的选法的数目为 $18 + 6 = 24$.

二、解答题: 本大题共 3 小题, 满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分 16 分) 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数, $g(x) = (x-1)f(x)$, $h(x) = f(x) + x$. 若 $g(x)$ 为奇函数, $h(x)$ 为偶函数, 求 $\frac{f(1)f(3)\cdots f(99)}{f(2)f(4)\cdots f(100)}$ 的值.

解: 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $\begin{cases} g(-x) = -g(x), \\ h(-x) = h(x), \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (-x-1)f(-x) = -(x-1)f(x), \\ f(-x) - x = f(x) + x. \end{cases}$
.....4 分

所以 $(x-1)f(x) = (x+1)f(-x) = (x+1)(f(x) + 2x)$, 即 $f(x) = -x(x+1)$.
.....8 分

因此, $\frac{f(1)f(3)\cdots f(99)}{f(2)f(4)\cdots f(100)} = \prod_{k=1}^{50} \frac{-(2k-1) \cdot 2k}{-2k \cdot (2k+1)} = \prod_{k=1}^{50} \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{1}{101}$.
.....16 分

10. (本题满分 20 分) 在平面直角坐标系中, 一条过点 $(0, 1)$ 的直线 l 经过点集 $\Gamma = \{(x, y) \mid y^2 = x + 3|x|\}$ 中的四个点 $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, 4)$. 求 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ 的取值范围.

解: 根据条件, 显然 l 不是 y 轴, 设 $l: y = kx + 1$, 代入方程 $y^2 = x + 3|x|$ 得

$$(kx+1)^2 = x + 3|x|. \quad (1)$$

显然 $x \neq 0$. 当 $x > 0$ 时, (1) 变为

$$k^2x^2 + (2k-4)x + 1 = 0; \quad (2)$$

当 $x < 0$ 时, (1) 变为

$$k^2x^2 + (2k+2)x + 1 = 0. \quad (3)$$

由于 (1) 有四个相异的实根, 故 (2) 有两个相异正根, 且 (3) 有两个相异负根, 即

$$\begin{cases} k \neq 0, \\ (2k-4)^2 - 4k^2 > 0, \quad 2k-4 < 0, \\ (2k+2)^2 - 4k^2 > 0, \quad 2k+2 > 0, \end{cases}$$

解得 $k \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, 1)$10 分

不妨设 x_1, x_2 为②的两根, x_3, x_4 为③的两根, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{2k-4}{k^2}, x_1 x_2 = \frac{1}{k^2}, x_3 + x_4 = -\frac{2k+2}{k^2}, x_3 x_4 = \frac{1}{k^2},$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3 x_4} = -(2k-4) - (2k+2) \\ &= 2-4k \in (-2, 2) \cup (2, 4). \end{aligned} \quad \text{.....20 分}$$

11. (本题满分 20 分) 对整数 $n \geq 3$, 在一个棱长均为 1 的正 n 棱柱的所有 $3n$ 条棱中, 随机选取两条不同的棱 l_1, l_2 , 将事件“ l_1 所在直线与 l_2 所在直线平行”发生的概率记为 P_n . 是否存在两个不同的正整数 $k, l (k, l \geq 3)$ 满足 $P_k = P_l$? 证明你的结论.

解: 在正 n 棱柱的所有 $3n$ 条棱中选取两条棱 l_1, l_2 的方法数为 C_{3n}^2 .

现考虑 $l_1 \parallel l_2$ 的选法, 显然 l_1, l_2 均为侧棱或均为底面上的棱.

若 l_1, l_2 均为侧棱, 则所有 C_n^2 种选法都满足要求.

若 l_1, l_2 均为底面上的棱, 注意到正 n 棱柱的两个底面都是正 n 边形, 且对应边平行, 可按 n 的奇偶性讨论如下:

当 n 为奇数时, 正 n 边形没有平行边, 故 $l_1 \parallel l_2$ 当且仅当 l_1, l_2 选自两个底面的对应边, 有 n 种选法. 相应可知

$$P_n = \frac{C_n^2 + n}{C_{3n}^2} = \frac{n+1}{3(3n-1)}.$$

当 n 为偶数时, 正 n 边形恰有 $\frac{n}{2}$ 组对边平行, 故两个底面的 $2n$ 条边可按平行关系分为 $\frac{n}{2}$ 组, 每组 4 条, 则 l_1, l_2 有 $\frac{n}{2} \cdot C_4^2 = 3n$ 种选法. 相应可知

$$P_n = \frac{C_n^2 + 3n}{C_{3n}^2} = \frac{n+5}{3(3n-1)}. \quad \text{.....10 分}$$

假设存在两个不同的正整数 $k, l (k, l \geq 3)$ 满足 $P_k = P_l$.

若 k, l 都是奇数, 则 $\frac{k+1}{3(3k-1)} = \frac{l+1}{3(3l-1)}$, 化简得 $k=l$, 矛盾.

若 k, l 都是偶数, 则 $\frac{k+5}{3(3k-1)} = \frac{l+5}{3(3l-1)}$, 化简得 $k=l$, 矛盾.

若 k, l 一奇一偶, 不妨设 $k=2s-1, l=2t$, 则

$$\frac{2s}{3(6s-4)} = P_{2s-1} = P_{2t} = \frac{2t+5}{3(6t-1)},$$

即 $\frac{s}{3s-2} = \frac{2t+5}{6t-1}$, 化简得 $4s-t = \frac{5}{2}$, 矛盾.

综上, 不存在正整数 k, l 满足要求.20 分