

幂函数与函数的性质

一、填空题

1. 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 5m + 7)x^{m-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 若正数 a, b 满足 $a + 2b = m$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为_____.
2. 若幂函数 $y = x^s$ 在 $x > 1$ 时的图象位于直线 $y = x$ 的下方, 则 s 的取值范围为_____.
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2-3a)x+5, & x \geq 1 \\ x^{a-3}+3, & 0 < x < 1 \end{cases}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围为_____.
4. 写出一个满足下列条件的函数解析式_____. ① $f(-x) = f(x)$; ② $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 有 $[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) < 0$; ③ $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$; ④ $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1)f(x_2)$.
5. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 1$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 若对于任意 $1 \leq x_1 < x_2 \leq 3$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -2$, 则实数 a 的取值范围是_____.
6. 若函数 $f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+3) = -f(x)$, $f(2x+3)$ 是偶函数, 且当 $x \in [2, 3]$ 时, $f(x) = 3x$, 则 $f(2026) =$ _____.
7. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$, $g(x) = x + \frac{1}{x}$, 若对 $\forall x_1 \in [1, 2]$, 总 $\exists x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$ 成立, 则 a 的取值范围是_____.

8. 若对任意 $1 < x < 4$, 使得 $x^2 - ax + 8 < 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

9. 若对满足条件 $x + y + 3 = xy, (x > 0, y > 0)$ 的任意实数 x, y , $(x + y)^2 - a(x + y) + 3 \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最大值是_____.

10. 已知函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是单调函数, $f\left[f(x) - \frac{1}{x}\right] = 2$, 则 $f\left(\frac{1}{5}\right) =$ _____.

11. 已知 $m \in \mathbf{R}$, 命题 $p: \forall -1 \leq x \leq 1$, 不等式 $-3x + 1 \geq m^2 - 3m$ 恒成立; 命题 $q: \exists -1 \leq x \leq 1$, 使得 $m \leq x$ 成立, 若 p 为真命题, 则实数 m 的取值范围为_____; 若 q 和 p 一真一假, 则实数 m 的取值范围为_____.

12. 记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = [x]$ 的图象与直线 $y = x - 1$ 的图象的交点个数是_____.

13. 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = [x]$ 称为高斯函数. 下列关于高斯函数的说法正确的有_____.

① $[-x] = -[x]$;

② $x - 1 < [x] \leq x$;

③ 任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $[x] + [y] \leq [x + y]$;

④ 任意 $x \geq 0, y \geq 0$, $[xy] \leq [x][y]$.

14. 利用函数的单调性求解, 关于 x 的不等式 $\sqrt{x-1} - \frac{5}{x} - 1 \geq 0$ 的解集是_____.

二、解答题

15. 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且满足 $3f(x+1) - f(x) = 2x + 9$

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式; (2) 求函数 $y = f(2x) - \sqrt{f(x)}$ 的值域.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$

(1) 根据定义证明: 函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递减;

(2) 若不等式 $f(x) < b$ 对一切实数 x 都成立, 求 b 的取值范围.

17. 函数 $f(x)$ 对任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ 都有 $f(a+b) = f(a) + f(b) - 1$, 并且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$

(1) 判断函数 $f(x)$ 是否为奇函数;

(2) 证明: $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;

(3) 若 $f(4) = 5$, 解不等式 $f(3m^2 - m - 2) < 3$. ;

18. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, $f(xy) = f(x) + f(y) - 3$, 且当 $x > 1$ 时, $f(x) < 3$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并写出必要的证明过程;

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

(3) 解不等式: $f(x+2) - f(x-1) < f(3) - 3$.

19. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且对 $m, n \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(m+n) = f(m) + f(n) - 1$, 且 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) > 0$.

(1) 求证: $f(x)$ 是单调增函数;

(2) 列举出具有这样性质的一个函数, 并加以验证.

20. 已知函数 $f(x) = x^2 - (a+2)x + 4$ ($a \in \mathbf{R}$)

(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) \leq 4 - 2a$;

(2) 若对任意的 $x \in (1, 4]$, $f(x) + a + 1 \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 已知 $g(x) = -3x + 5 - 2m$, 当 $a = 2$ 时, 若对任意的 $x_1 \in [1, 4]$, 总存在 $x_2 \in [1, 4]$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.