

椭圆基础知识强化（方程/性质）+综合应用初步（定值/定点/最值）

一、单选题

1. 方程 $\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6$ 表示的曲线的标准方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. 已知圆 $C: (x+3)^2 + y^2 = 64$, $A(3,0)$, P 是圆 C 上任意一点, 线段 AP 的垂直平分线 l 和半径 CP 相交于点 Q , 当点 P 在圆上运动时, 点 Q 的轨迹方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$
C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ D. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$

3. 已知一动圆与圆 $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$ 外切, 同时与圆 $x^2 + y^2 - 6y - 91 = 0$ 内切, 则该动圆圆心的轨迹方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ B. $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{27} = 1$
C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ D. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

4. 已知点 P 到点 $F(2,0)$ 的距离与点 P 到直线 $x=8$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$, 则 $|FP|$ 的最大值为（ ）

- A. 1 B. 3 C. 6 D. 8

5. 已知圆 C , $(x+1)^2 + y^2 = 16$, 圆 C 内有一个定点 $B(1,0)$, 动圆 P 过点 B , 且与圆 C 内切. 圆心 P 形成的轨迹为 E , 下列说法正确的是（ ）

- A. E 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
B. 直线 $y = k(x+1)$ 与 E 无公共点
C. 点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 是直线 L 与 E 所产生的相交弦中点, 则 L 的方程是 $3x - y + 1 = 0$
D. M 是 E 上一个动点, 则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CM}$ 的最大值为 6

6. 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上一点, F_1, F_2 是椭圆的左、右焦点, 若 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则下列说法正确的是（ ）

- A. $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$
B. 若点 M 是椭圆上一动点, 则 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2}$ 的最大值为 9
C. 点 P 的纵坐标为 $\frac{5\sqrt{3}}{6}$
D. $\triangle F_1PF_2$ 外接圆的面积为 $\frac{16}{3}\pi$

二、多选题

7. 设椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F , 直线 $y = mx$ 与椭圆交于 A, B 两点, P 为椭圆上一点 (异于 A, B), 则 ()
- A. $|AF| + |BF|$ 为定值
- B. $\triangle ABF$ 的周长的取值范围是 $[6, 12]$
- C. $\angle APB$ 可能为直角
- D. 若直线 PA 与直线 PB 的斜率存在, 则乘积为 $-\frac{1}{3}$
8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 为 C 上的动点, 以下正确的是 ()
- A. 椭圆 C 长轴长为 2
- B. $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6
- C. $|PF_1|$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$
- D. $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$
9. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 P 在椭圆 E 的第一象限部分, 且 $|PF_1| = 3|PF_2|$. 过点 P 作椭圆 E 的切线, 该切线与 x 轴、 y 轴正半轴分别交于 M, N , 则下列说法正确的是 ()
- A. 点 P 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$
- B. $|PF_2| = 1$
- C. $\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- D. 该切线的斜率为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. 画法几何的创始人——法国数学家加斯帕尔·蒙日发现: 与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆. 我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, A, B 为椭圆上两个动点. 直线 l 的方程为 $bx + ay - a^2 - b^2 = 0$. 下列说法正确的是 ()
- A. 椭圆 C 的蒙日圆的方程为 $x^2 + y^2 = 3b^2$,
- B. 对直线 l 上任意一点 P , $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$,
- C. 记点 A 到直线 l 的距离为 d , 则 $d + |AF_1|$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}b$,
- D. 若矩形 $MNGH$ 的四条边均与椭圆 C 相切, 则矩形 $MNGH$ 面积的最大值为 $6b^2$.

三、填空题

11. 已知椭圆过点 $P(2, -\sqrt{2})$ 和点 $Q(-1, \frac{\sqrt{14}}{2})$, 则此时椭圆的标准方程为_____.

12. 与椭圆方程 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ 有相同焦点, 且过点 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ 的椭圆方程为_____.

13. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 4$, 从 C 上任意一点 P 向 y 轴作垂线 PP' , P' 为垂足, 则 PP' 的中点 M 所在曲线的方程为_____.

14. 已知 A, B 两点坐标分别为 $(-4, 0), (4, 0)$, 直线 AP, BP 相交于点 $P(x, y)$, 且它们的斜率之积是 $-\frac{9}{16}$, 则代数式 $|3x - 4y - 24|$ 的最大值为_____.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F , 点 P 在 C 上, 点 $Q(4, 0)$, 且 $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PQ} = -\frac{15}{4}$, 则点 P 到 x 轴的距离为_____.

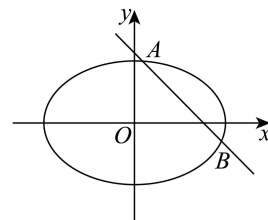
16. 直线 $l: x + 2y - 4 = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{m+1} + \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 有且仅有一个公共点 P , 则 $m =$ _____, 点 P 的坐标是_____.

17. 直线 $y = 2x + t$ 被椭圆 $2x^2 + y^2 = 2$ 所截得的弦长为 $\frac{5\sqrt{2}}{3}$, 则实数 $t =$ _____.

18. 已知过椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (5 > b > 0)$ 的焦点的最短弦长为 2, 则 $b =$ _____.

19. 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线交椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 于 A, B 两点, 则线段 AB 中点 M 的轨迹方程是_____.

20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 斜率为 -1 的一条直线与椭圆交于 A, B 点, 且 AB 的中点坐标为 $(2, 1)$, 则椭圆的离心率 $e =$ _____.



21. 过点 $P(1, 1)$ 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点, 若 P 为 AB 中点, 则直线 l 的方程为_____.

22. 已知 P 为椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的动点, 则点 P 到直线 $l: 4x - 5y + 66 = 0$ 最短距离为_____.

四、解答题

23. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$, 且焦点在 x 轴上, 过点 $(-\sqrt{2}, 1)$

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $P(0, -2)$ 的直线 l 与椭圆交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 若 $S_{\triangle OMN} = \sqrt{2}$, 求直线 l 的方程及弦长 $|MN|$.

24. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长半轴长为 2, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 求 $\triangle OAB$ 的面积的最大值及此时直线 l 的方程.

25. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 且过点 $M\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, 点 F_1, F_2 分别为椭圆的左右焦点.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 设点 P 为第一象限内椭圆上的点, 若 $PF_1 \perp PF_2$, 求点 P 的坐标;

(3) 过右焦点 F_2 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 在 x 轴上是否存在定点 T , 使得 $\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB}$ 的值为定值? 若存在, 求出定点 T 的坐标及该定值; 若不存在, 请说明理由.

26. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是 C 上的点, 且 $|PF_1| + |PF_2| = 4$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 设 $M(0, -2), N(0, 2)$.

① 若点 P 位于第一象限, 直线 PM, PN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 \cdot k_2$ 的取值范围;

② 设直线 $l: x = my + n$ 与 C 交于 P, Q 两点 (不与 M 重合), 若 $\angle PMO = \angle QMO$ (O 为坐标原点), 试判断直线 l 是否过定点, 如果是, 请求出定点, 如果不是, 请说明理由.